

CHUYÊN ĐỀ LUYỆN THI ĐẠI HỌC 2013 - 2014

PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH

BIÊN SOẠN: LƯU HUY THƯỞNG



HỌ VÀ TÊN: ....

LỚP :...

TRƯỜNG :...

HÀ NỘI, 8/2013

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1: ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $ax + b = 0$

ax + b = 0 **(1)**		
Hệ số		**Kết luận**
a ≠ 0		(1) *có nghiệm duy nhất* $x = -\frac{b}{a}$
a = 0	*b ≠ 0*	(1) *vô nghiệm*
	b = 0	(1) *nghiệm đúng với mọi x*

Chú ý: *Khi a ≠ 0 thì (1) được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.*

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $ax + b < 0$

Biện luận

Điều kiện		**Kết quả tập nghiệm**
a > 0		S = $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$
a < 0		S = $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$
a = 0	*b ≥ 0*	S = ∅
	b < 0	S = *R*

Dấu nhị thức bậc nhất

f(x) = ax + b (a ≠ 0)	
$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$	*a.f(x) < 0*
$x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$	*a.f(x) > 0*

3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI: $ax^2 + bx + c = 0$

1. Cách giải

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ **(1)**	
$\Delta = b^2 - 4ac$	**Kết luận**
Δ > 0	(1) *có 2 nghiệm phân biệt* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Δ = 0	(1) *có nghiệm kép* $x = -\frac{b}{2a}$
Δ < 0	(1) *vô nghiệm*

Chú ý: *– Nếu a + b + c = 0 thì (1) có hai nghiệm là x = 1 và x =* $\frac{c}{a}$.

– Nếu a – b + c = 0 thì (1) có hai nghiệm là x = –1 và x = $-\frac{c}{a}$.

– Nếu b chẵn thì ta có thể dùng công thức thu gọn với $b' = \frac{b}{2}$.

2. Định lí Vi–et

Hai số x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thoả mãn các hệ thức

$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

4. **BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI**

<table>
<tr><th colspan="2">Xét dấu tam thức bậc hai</th><th>Giải bất phương trình bậc hai</th></tr>
<tr><td colspan="2">$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)</td><td rowspan="5">Dựa vào định lý dấu tam thức bậc hai để giải</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$a.f(x) > 0, \forall x \in R$</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>$a.f(x) > 0, \forall x \in R \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta > 0$</td><td>$a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$</td></tr>
</table>

II. CÁC DẠNG TOÁN

1. **Dạng toán 1: Giải và biện luận phương trình và bất phương trình**

HT1. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số *m*:

1) $(m^2+2)x - 2m = x - 3$ 2) $m(x-m) = x + m - 2$

3) $m(x - m + 3) = m(x-2) + 6$ 4) $m^2(x-1) + m = x(3m-2)$

5) $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$ 6) $(m+1)^2 x = (2m+5)x + 2 + m$

HT2. Giải các bất phương trình sau:

1) $\frac{(2x-5)(x+2)}{-4x+3} > 0$ 2) $\frac{x-3}{x+1} > \frac{x+5}{x-2}$ 3) $\frac{x-3}{x+5} < \frac{1-2x}{x-3}$

4) $\frac{3x-4}{x-2} > 1$ 5) $\frac{2x-5}{2-x} \geq -1$ 6) $\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1}$

HT3. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

1) $m(x-m) \leq x - 1$ 2) $mx + 6 > 2x + 3m$

3) $(m+1)x + m < 3m + 4$ 4) $mx + 1 > m^2 + x$

5) $\frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}$ 6) $3 - mx < 2(x-m) - (m+1)^2$

HT4. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

1) $\frac{2x+m-1}{x+1} > 0$ 2) $\frac{mx-m+1}{x-1} < 0$ 3) $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0$

HT5. Giải và biện luận các phương trình sau:

1) $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$ 2) $2x^2 + 12x - 15m = 0$

3) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$ 4) $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

5) $(m-1)x^2 + (2-m)x - 1 = 0$ 6) $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$

HT6. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

1) $x^2 - mx + m + 3 > 0$ 2) $(1+m)x^2 - 2mx + 2m \leq 0$ 3) $mx^2 - 2x + 4 > 0$

HT7. Trong các phương trình sau, tìm giá trị của tham số để phương trình:
i) Có nghiệm duy nhất ii) Vô nghiệm iii) Nghiệm đúng với mọi $x \in$ R.

1) $(m-2)x = n-1$ 2) $(m^2+2m-3)x = m-1$

3) $(mx+2)(x+1) = (mx+m^2)x$ 4) $(m^2-m)x = 2x+m^2-1$

HT8. Tìm *m* để các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $m^2x+4m-3 < x+m^2$ b) $m^2x+1 \geq m+(3m-2)x$

c) $mx-m^2 > mx-4$ d) $3-mx < 2(x-m)-(m+1)^2$

2. Dạng toán 2: Dấu của nghiệm số phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)\ \ (1)$

• *(1) có hai nghiệm trái dấu ⇔ P < 0*

• *(1) có hai nghiệm cùng dấu ⇔* $\begin{cases}\Delta \geq 0\\ P>0\end{cases}$

• *(1) có hai nghiệm dương ⇔* $\begin{cases}\Delta \geq 0\\ P>0\\ S>0\end{cases}$

• *(1) có hai nghiệm âm ⇔* $\begin{cases}\Delta \geq 0\\ P>0\\ S<0\end{cases}$

Chú ý: *Trong các trường hợp trên nếu yêu cầu hai nghiệm phân biệt thì Δ > 0.*

Bài tập

HT9. Xác định *m* để phương trình:

i) có hai nghiệm trái dấu ii) có hai nghiệm âm phân biệt

iii) có hai nghiệm dương phân biệt

1) $x^2+5x+3m-1=0$ 2) $2x^2+12x-15m=0$

3) $x^2-2(m-1)x+m^2=0$ 4) $(m+1)x^2-2(m-1)x+m-2=0$

5) $(m-1)x^2+(2-m)x-1=0$ 6) $mx^2-2(m+3)x+m+1=0$

7) $x^2-4x+m+1=0$ 8) $(m+1)x^2+2(m+4)x+m+1=0$

3. Dạng toán 3: Áp dụng định lý Viet

a. Biểu thức đối xứng của các nghiệm số

Ta sử dụng công thức $S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a};\ P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$ *để biểu diễn các biểu thức đối xứng của các nghiệm x_1, x_2 theo S và P.*

Ví dụ: $$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1x_2 = S^2-2P$$

$$x_1^3+x_2^3 = (x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right] = S(S^2-3P)$$

b. Hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số

Để tìm hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số ta tìm:

$$S = x_1+x_2 = -\frac{b}{a};\qquad P = x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

(S, P có chứa tham số m).

Khử tham số m giữa S và P ta tìm được hệ thức giữa x_1 và x_2.

c. Lập phương trình bậc hai

Nếu phương trình bậc hai có các nghiệm u và v thì phương trình bậc hai có dạng:

$$x^2-Sx+P=0,$$ *trong đó S = u + v, P = uv.*

Bài tập

HT10. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính:

A = $x_1^2 + x_2^2$; B = $x_1^3 + x_2^3$; C = $x_1^4 + x_2^4$; D = $|x_1 - x_2|$; E = $(2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)$

1) $x^2 - x - 5 = 0$ 2) $2x^2 - 3x - 7 = 0$ 3) $3x^2 + 10x + 3 = 0$

4) $x^2 - 2x - 15 = 0$ 5) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 6) $\sqrt{3}x^2 + 5x - \sqrt{2} = 0$

HT11. Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (*). Xác định *m* để:

1) (*) có hai nghiệm phân biệt.

2) (*) có một nghiệm bằng 2. Tính nghiệm kia.

3) Tổng bình phương các nghiệm bằng 2.

HT12. Cho phương trình: $x^2 - 2(2m+1)x + 3 + 4m = 0$ (*).

1) Tìm *m* để (*) có hai nghiệm x_1, x_2.

2) Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với *m*.

3) Tính theo *m*, biểu thức A = $x_1^3 + x_2^3$.

4) Tìm *m* để (*) có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

5) Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là x_1^2, x_2^2.

HT13. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$ (*).

1) Tìm *m* để (*) có nghiệm *x = 0*. Tính nghiệm còn lại.

2) Khi (*) có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với *m*.

3) Tìm *m* để (*) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả: $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

HD: a) m = 3; m = 4 b) $(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 - 8 = 0$ *c) m = –1; m = 2.*

HT14. Cho phương trình: $x^2 - (m^2 - 3m)x + m^3 = 0$.

a) Tìm *m* để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

b) Tìm *m* để phương trình có một nghiệm bằng 1. Tính nghiệm còn lại.

HD: a) m = 0; m = 1 b) $x_2 = 1;\ x_2 = 5\sqrt{2} - 7;\ x_2 = -5\sqrt{2} - 7$.

BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa và tính chất

- $|A| = \begin{cases} A & khi\ A \geq 0 \\ -A & khi\ A < 0 \end{cases}$
- $|A| \geq 0,\ \forall A$
- $|A.B| = |A|.|B|$
- $|A|^2 = A^2$
- $|A+B| = |A| + |B| \Leftrightarrow A.B \geq 0$
- $|A-B| = |A| + |B| \Leftrightarrow A.B \leq 0$
- $|A+B| = ||A| - |B|| \Leftrightarrow A.B \leq 0$
- $|A-B| = ||A| - |B|| \Leftrightarrow A.B \geq 0$

Với B > 0 ta có: $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$; $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A < -B \\ A > B \end{array}\right.$.

2. Cách giải

Để giải phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ ta tìm cách để khử dấu GTTĐ, bằng cách:
– Dùng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ.
– Bình phương hai vế.
– Đặt ẩn phụ.

a) Phương trình:

- **Dạng 1:** $|f(x)| = g(x) \overset{C_1}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \end{array}\right. \overset{C_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

- **Dạng 2:** $|f(x)| = |g(x)| \overset{C_1}{\Leftrightarrow} [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \overset{C_2}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

- **Dạng 3:** $a|f(x)| + b|g(x)| = h(x)$

Đối với phương trình có dạng này ta thường dùng phương pháp khoảng để giải.

b) Bất phương trình

- **Dạng1:** $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases}$

- **Dạng 2:** $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x)\ có\ nghĩa \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) < -g(x) \\ f(x) > g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

Chú ý: • $|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0$; $|A| = -A \Leftrightarrow A \leq 0$

• *Với B > 0 ta có:* $|A| < B \Leftrightarrow -B < A < B$; $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A < -B \\ A > B \end{array}\right.$.

• $|A+B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \geq 0$; $|A-B| = |A| + |B| \Leftrightarrow AB \leq 0$

Bài tập

HT15. Giải các phương trình sau:

1) $|2x-1| = x+3$
2) $\sqrt{x^2+6x+9} = |2x-1|$
3) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$
4) $|4x-17| = x^2 - 4x - 5$
5) $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17$
6) $|x-1| - |x| + |2x+3| = 2x+4$

7) $2|x+1|-|x^2-2x-8|=x^2-x-5$ 8) $|x-1|+|x+2|+|x-3|=14$

HT16. Giải các phương trình sau:

1) $|4x+7|=4x+7$ 2) $|2x-3|=3-2x$

3) $|x-1|+|2x+1|=|3x|$ 4) $|x^2-2x-3|=x^2+|2x+3|$

5) $|2x-5|+|2x^2-7x+5|=0$ 6) $|x+3|+|7-x|=10$

HT17. Giải các phương trình sau:

1) $x^2-2x+|x-1|-1=0$ 2) $x^4+4x^2+2|x^2-2x|=4x^3+3$

HT18. Giải các bất phương trình sau

1) $|x^2-2x-1|<x+1$ 2) $|2x^2+x-3|\ge 2x+1$

3) $|x^2-5x+4|\le x^2+6x+5$ 4) $|x^2+x-1|<|2x^2+x-2|$

BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU CĂN THỨC

Cách giải: Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

– Nâng luỹ thừa hai vế.
– Đặt ẩn phụ.

Chú ý: *Khi thực hiện các phép biến đổi cần chú ý điều kiện để các căn được xác định.*

I. Biến đổi tương đương

a. Phương trình:

Dạng 1: $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

Dạng 2: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0\ (hay\ \ g(x)\ge 0) \end{cases}$

Dạng 3: $\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Dạng 4: $\sqrt[3]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=\left(g(x)\right)^3$

b. Bất phương trình

• **Dạng 1**: $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$

• **Dạng 2:** $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases} \end{array}\right.$

Bài tập

HT19. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2x-3}=x-3$ 2) $\sqrt{5x+10}=8-x$

3) $x-\sqrt{2x-5}=4$

4) $\sqrt{x^2+x-12}=8-x$

5) $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$

6) $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$

8) $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$

8) $(x-3)\sqrt{x^2+4}=x^2-9$

HT20. Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2+x-12}<8-x$

2) $\sqrt{x^2-x-12}<7-x$

3) $\sqrt{-x^2-4x+21}<x+3$

4) $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$

5) $\sqrt{3x^2+13x+4}\ge x-2$

6) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}>x+1$

7) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}>\sqrt{2x-8}$

8) $\sqrt{2-x}>\sqrt{7-x}-\sqrt{-3-2x}$

9) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}\le 1$

HT21. Giải các phương trình:

1) $\sqrt{3x+2}+\sqrt{x+1}=3$

2) $\sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=1$

3) $x^2+\sqrt{x+1}=1$

4) $\sqrt{x+9}=5-\sqrt{2x+4}$

5) $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3$

6) $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$

HT22. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$

2) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

3) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$

4) $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$

5) $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-13}=1$

6) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$

HT23. Giải các bất phương trình sau:

1) $\dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{3-x}\le 2$

2) $\dfrac{\sqrt{-2x^2-15x+17}}{x+3}\ge 0$

3) $(x+3)\sqrt{x^2-4}\le x^2-9$

4) $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{2x+5}\ge\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x+4}$

HT24. Giải các bất phương trình sau:

1) $x+2\le\sqrt[3]{x^2+8}$

2) $\sqrt[3]{2x^2+1}\ge\sqrt[3]{3x^2-1}$

3) $\sqrt[3]{x+1}>\sqrt{x-3}$

HT25. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}$

2) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$

3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$

4) $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$

5) $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$

6) $\sqrt{1-x}=\sqrt{6-x}-\sqrt{-5-2x}$

7) $\sqrt[3]{12-x}+\sqrt[3]{14+x}=2$

8) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-1}$

II. Đặt ẩn phụ

Dạng 1: $af(x)+b\sqrt{f(x)}+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\sqrt{f(x)},\ t\ge 0 \\ at^2+bt+c=0 \end{cases}$

Dạng 2: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)$

Dạng 3: $\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)}+\sqrt{f(x).g(x)}=h(x)$ và $f(x)\pm g(x)=k\ (k=const)$ Đặt $t=\sqrt{f(x)}\pm\sqrt{g(x)},$.

HT26. Giải các phương trình sau:

1) $x^2-6x+9=4\sqrt{x^2-6x+6}$

2) $\sqrt{(x-3)(8-x)}+26=-x^2+11x$

3) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

4) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

5) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$

6) $x^2-2x+8-4\sqrt{(4-x)(x+2)}=0$

HT27. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}=3+\sqrt{(x+3)(6-x)}$

2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{(2x+3)(x+1)}-16$

3) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x-1)(3-x)}=1$

4) $\sqrt{7-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{(7-x)(2+x)}=3$

5) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$

6) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=4x-9+2\sqrt{3x^2-5x+2}$

7) $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

8) $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+9}$

HT28. Giải các bất phương trình sau:

1) $\sqrt{(x-3)(8-x)}+26>-x^2+11x$

2) $(x+5)(x-2)+3\sqrt{x(x+3)}>0$

3) $(x+1)(x+4)<5\sqrt{x^2+5x+28}$

4) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}\ge 1$

HT29. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}}+\sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}}=14$

2) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$

3) $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}}=4$

Dạng 4: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn: Là phương pháp sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu về 1 phương trình với 1 ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn chứa ẩn x ban đầu.

Bài tập:

1) $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$ 2) $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$

3) $x^2-1=2x\sqrt{x^2+2x}$ 4) $x^2+4x=(x+2)\sqrt{x^2-2x+4}$

Dạng 7: Đặt ẩn phụ chuyển phương trình về hệ đối xứng:

+ $\sqrt{ax+b}=c(dx+e)^2+\alpha x+\beta y$ **với** $d=ac+\alpha, e=bc+\beta$

Đặt: $dy+e=\sqrt{ax+b}$

+ $\sqrt[3]{ax+b}=c(dx+e)^3+\alpha x+\beta$ **với** $d=ac+\alpha, e=bc+\beta$

Đặt: $dy+e=\sqrt[3]{ax+b}$

Bài tập

HT30. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{3x+1}=-4x^2+13x-5$ 2) $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$

3) $\sqrt{x+1}=x^2+4x+5$ 4) $\sqrt{\dfrac{4x+9}{28}}=7x^2+7x, x>0$

5) $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ 6) $x\sqrt[3]{35-x^3}\left(x+\sqrt[3]{35-x^3}\right)=30$

III. Phương pháp trục căn thức

Bài tập

HT31. Giải các phương trình sau:

1) $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$ 2) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

3) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$ 4) $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1}=x+4$

5) $2\sqrt{(2-x)(5-x)}=x+\sqrt{(2-x)(10-x)}$ 6) $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$

7) $\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt{x-1}+2x-3$ 8) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{3x^3-2}=3x-2$

9) $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2x+4$ 10) $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

11) $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$

IV. Phương pháp xét hàm số

HT32. Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$ 2) $\sqrt{x-1}=-x^3-4x+5$

3) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=3$ 4) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2+3}=4-x$

V. Phương pháp đánh giá

1) $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x-1}=2$ 2) $2\sqrt{7x^3-11x^2+25x-12}=x^2+6x-1$

3) $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ 4) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$

VI. Các bài toán liên quan đến tham số

HT1. Cho phương trình $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+x+\sqrt{x-4}=m$.

a. Giải phương trình với $m=6$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm. **Đ/s:** $x=4; m\geq 6$

HT2. Tìm tham số để phương trình $3x^2+2x+3=m(x+1)\sqrt{x^2+1}$ có nghiệm thực. **Đ/s:** $m<-3\cup m\geq 2\sqrt{2}$

HT3. Cho phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}=m$.

a. Giải phương trình khi $m=2$.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm. **Đ/s:** $x=-1; x=3.2\sqrt{2}-2\leq m\leq 2$

HT4. Tìm tham số thực m để bất phương trình $\sqrt{x^2-4x+5}\geq x^2-4x+m$ có nghiệm thực trong đoạn $\left[2;3\right]$.

Đ/s: $m\leq -1$

HT5. Tìm m để phương trình $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5}=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt.

Đ/s:

HT6. Tìm m để phương trình $m\sqrt{x^2-2x+2}=x+2$ có hai nghiệm phân biệt. **Đ/s:** $m\in(1;\sqrt{10})$

HT7. Tìm m để phương trình $m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ có nghiệm thực. **Đ/s:**

$m\in\left(-2\sqrt{5};\dfrac{3\sqrt{2}-4}{2}\right]$

HT8. Cho phương trình $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=m$ Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm.

Đ/s: $m\geq -4$

ÔN TẬP

I. BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

HT1. Giải các phương trình sau:

1. $\left|x^2-1\right|=\left|x^3-5x^2-2x+4\right|$ **Đ/s:** $x=-1, x=\dfrac{7\pm\sqrt{29}}{2}, x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2}$
2. $\left|x^3-3x+1\right|=2x+1$ **Đ/s:** $x=2, x=5$
3. $\left|x^2-1\right|+\left|x\right|=1$ **Đ/s:** $x=0, x=\pm1$
4. $\left|x+1\right|+\left|x-1\right|=1+\left|1-x^2\right|$ **Đ/s:** $x=0, x=\pm2$
5. $\left|3-2x\right|-\left|x\right|=5\left(\left|2+3x\right|+x-2\right)$ **Đ/s:** $x=-\dfrac{23}{9}, x=\dfrac{3}{23}$

HT2. Giải các phương trình sau:

1. $\sqrt{-x^2+4x-3}=2x-5$ **Đ/s:** $x=\dfrac{14}{5}$
2. $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}$ **Đ/s:** $x=-1$
3. $3x+\sqrt{x^3-x+1}=-2$ **Đ/s:** $x=-1$
4. $\sqrt{x^3-2x+5}=2x-1$ **Đ/s:** $x=2\cup x=1+\sqrt{3}$
5. $\sqrt{x^3+x^2+6x+28}=x+5$ **Đ/s:** $x=1\cup x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$
6. $\sqrt{x^4-4x^3+14x-11}=1-x$ **Đ/s:** $x=-2\cup x=1$
7. $\sqrt{x^4+5x^3+12x^2+17x+7}=\sqrt{6}(x+1)$ **Đ/s:** $x=\sqrt{3}-2$
8. $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+7}=1$ **Đ/s:** $x=9$
9. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}=8$ **Đ/s:** $x=8$
10. $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$ **Đ/s:** $x=1$
11. $\sqrt{5x+1}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{14x+7}$ **Đ/s:** $x=-\dfrac{1}{9}; x=3$
12. $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$ **Đ/s:** $x=0\cup x=\dfrac{9}{8}$
13. $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}}+\sqrt{x-\sqrt{14x-49}}=\sqrt{14}$ **Đ/s:** $x=\dfrac{7}{2}\cup x=7$
14. $\sqrt{3x+8}-\sqrt{3x+5}=\sqrt{5x-4}-\sqrt{5x-7}$ **Đ/s:** $x=6$
15. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}=2\sqrt{x}+\sqrt{2x+2}$ **Đ/s:** $x=1$
16. $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$ **Đ/s:** $x=3$
17. $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+7}=\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x+8}$ **Đ/s:** $x=-1$
18. $\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\dfrac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}}=x+1$ **Đ/s:** $x=\dfrac{3}{5}$
19. $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}}=4$ **Đ/s:** $x=1; x=\dfrac{5}{2}$
20. $\sqrt{\dfrac{x^3+1}{x+3}}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x+3}$ **Đ/s:** $x=1\pm\sqrt{3}$

21. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ **Đ/s:** $x=1$
22. $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$ **Đ/s:** $x=-1$
23. $\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{2x-1}=\sqrt[3]{5x+1}$ **Đ/s:** $x=\frac{19}{30}$
24. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$ **Đ/s:** $x=2$

HT3. Giải các phương trình sau *(nhóm nhân tử chung)*

1. $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$ **Đ/s:** $x=-3$
2. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=1+\sqrt[3]{x^2+3x+2}$ **Đ/s:** $x=0; x=-1$
3. $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$ **Đ/s:** $x=5; x=4$
4. $\sqrt{x^2+10x+21}=3\sqrt{x+3}+2\sqrt{x+7}-6$ **Đ/s:** $x=1; x=2$
5. $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{x+2}=2x+\sqrt{x+\frac{6}{x}+5}$ **Đ/s:** $x=1; x=2$
6. $x-2\sqrt{x-1}-(x-1)\sqrt{x}+\sqrt{x^2-x}=0$ **Đ/s:** $x=2$
7. $2x^2-6x+10-5(x-2)\sqrt{x+1}=0$ **Đ/s:** $x=3; x=8$
8. $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$ **Đ/s:** $x=0; x=1$
9. $\sqrt{x+1}+2(x+1)=x-1+\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}$ **Đ/s:** $x=0$
10. $\sqrt[3]{x^2+3x+2}(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2})=1$ **Đ/s:** $x=-\frac{3}{2}$

HT4. Giải các phương trình sau: $\left(A^2+B^2=0\right)$

1. $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$ **Đ/s:** $x=3$
2. $x^2-x+6=4\sqrt{1-3x}$ **Đ/s:** $x=-1$
3. $x^4-2x^2\sqrt{x^2-2x+16}+2x^2-6x+20=0$ **Đ/s:** $x=2$
4. $x+4\sqrt{x+3}+2\sqrt{3-2x}=11$ **Đ/s:** $x=1$
5. $13\sqrt{x-1}+9\sqrt{x+1}=16x$ **Đ/s:** $x=\frac{5}{4}$
6. $2\sqrt{x+1}+6\sqrt{9-x^2}+6\sqrt{(x+1)(9-x^2)}-x^3-2x^2+10x+38=0$ **Đ/s:** $x=0$
7. $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$ **Đ/s:** $x=1$
8. $4x^2+12+\sqrt{x-1}=4\left(x\sqrt{5x-1}+\sqrt{9-5x}\right)$

HT5. Giải các bất phương trình sau (nhân liên hợp)

1. $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$ **Đ/s:** $x=\frac{1}{2}$
2. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$ **Đ/s:** $x=3$
3. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$ **Đ/s:** $x=3$
4. $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$ **Đ/s:** $x=3$
5. $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$ **Đ/s:** $x=2$
6. $3(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6}$ **Đ/s:** $x=3; x=\frac{11-3\sqrt{5}}{2}$

7. $9\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=x+3$ **Đ/s:** $x=6$
8. $\sqrt{3x^2-5x+1}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3(x^2-x-1)}-\sqrt{x^2-3x+4}$ **Đ/s:** $x=2$
9. $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$ **Đ/s:** $x=1\pm\sqrt{2}$
10. $(3x+1)\sqrt{x^2+3}=3x^2+2x+3$ **Đ/s:** $x=\pm1$
11. $(x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$ **Đ/s:** $x=0;x=-5+\sqrt{13}$
12. $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$ **Đ/s:** $x=2$
13. $\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=x^2-x-2$ **Đ/s:** $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
14. $\sqrt[3]{x+24}+\sqrt{12-x}=6$ **Đ/s:** $x=-24;x=-88$
15. $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$ **Đ/s:** $x=3$

HT6. Giải các bất phương trình sau:

1. $\left|3x+5\right|<\left|x^2+7x\right|$ **Đ/s:** $x\in\left(-\infty;-5-2\sqrt{5}\right)\cup\left(-5;-5+2\sqrt{5}\right)\cup(1;+\infty)$
2. $\left|x^2+8x-1\right|<2x+6$ **Đ/s:** $x\in(-5+2\sqrt{5};1)$
3. $\left|2x^2-3x-10\right|\ge 8-x$ **Đ/s:** $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right]\cup\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{37}}{2};+\infty\right)$
4. $\frac{\left|2x-1\right|}{x^2-3x-4}<\frac{1}{2}$ **Đ/s:** $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;4)\cup\left(\frac{7+\sqrt{57}}{2};+\infty\right)$
5. $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right|\ge x+5$ **Đ/s:** $x\in\left(-\infty;-1-\sqrt{7}\right]\cup\left[-3+\sqrt{15};1\right)\cup(1;-1+\sqrt{7})$
6. $\frac{3}{\left|x+3\right|-1}\ge\left|x+2\right|$ **Đ/s:** $x\in[-5;-4)\cup\left(-2;2-\sqrt{3}\right]$

HT7. Giải các bất phương trình sau:

1. $\sqrt{2x+3}\le\sqrt{4x^2-3x-3}$ **Đ/s:** $x\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$
2. $\sqrt{x^2-x-12}<x$ **Đ/s:** $x\in\left[4;+\infty\right)$
3. $\sqrt{-x^2+4x-3}>2x-5$ **Đ/s:** $\left[1;\frac{14}{5}\right)$
4. $\sqrt{5x^2-2x-2}\ge 4-x$ **Đ/s:** $x\in(-\infty;-3)\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$
5. $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}>5$ **Đ/s:** $x\in(0;+\infty)$
6. $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<\sqrt{5-2x}$ **Đ/s:** $x\in[-2;2)$
7. $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-8}\le\sqrt{2x+7}$ **Đ/s:** $x\in\left[9;+\infty\right)$
8. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{4x-1}\le 3\sqrt{x}$ **Đ/s:** $x\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right)$
9. $\sqrt{5x+1}-\sqrt{4-x}\le\sqrt{x+6}$ $x\in\left[-\frac{1}{5};3\right]$ **Đ/s:** $\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x-2}{x}}\ge 3$ $x\in\left(-\frac{1}{12};0\right)$

10. $\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{2x+5} \ge \dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x+4}$ **Đ/s:** $x \in \left[-2;-1\right] \cup x = 3$

11. $\left(x - \dfrac{2x+4}{2x-5}\right)\sqrt{10x-3x^2-3} \ge 0$ **Đ/s:** $x = 3 \cup x \in \left[\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{2}\right)$

12. $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x} < 1$ **Đ/s:** $x \in \left[-1-\sqrt{52};-5\right) \cup \left(1;-1+\sqrt{52}\right)$

13. $\dfrac{\sqrt{-3x^2+x+4}}{x} < 2$ **Đ/s:** $x \in [-1;0) \cup \left(\dfrac{9}{7};\dfrac{4}{3}\right]$

14. $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}} > \dfrac{1}{2x-1}$ **Đ/s:** $x \in \left(-\infty;-\dfrac{5}{2}\right) \cup \left(1;\dfrac{3}{2}\right) \cup (2;+\infty)$

15. $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}} > 1$ **Đ/s:** $x \in \left(\dfrac{\sqrt{13}-1}{6};+\infty\right)$

16. $\sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+6x+5} \le \sqrt{2x^2+9x+7}$ **Đ/s:** $x = 1; x = -5$

17. $\sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-3x+1} \ge x-1$ **Đ/s:** $x \in \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right] \cup x = 1$

18. $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$ **Đ/s:** $x \in \left[4;+\infty\right) \cup x = 1$

HT8. Giải các bất phương trình sau (nhân liên hợp)

1. $\dfrac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2} < x+21$ **Đ/s:** $x \in \left[-\dfrac{9}{2};\dfrac{7}{2}\right) \setminus \{0\}$

2. $\dfrac{x^2}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2} > x-4$ **Đ/s:** $x \in \left[-1;8\right)$

3. $\dfrac{6x^2}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2} > 2x + \sqrt{x-1} + 1$ **Đ/s:** $x \in \left(10+4\sqrt{5};+\infty\right)$

4. $\dfrac{x^2}{\left(x+1-\sqrt{x+1}\right)^2} < \dfrac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$ **Đ/s:** $x \in (-1;3) \setminus \{0\}$

5. $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$ **Đ/s:** $x \in \left[-\dfrac{3}{2};3\right) \setminus \{1\}$

6. $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+2x-3}\right) \ge 4$ **Đ/s:** $x \ge 2$

7. $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$ **Đ/s:** $x \ge 4 \cup x = 1$

8. $\dfrac{4}{\sqrt{x}} + \sqrt{2x+1} \ge \sqrt{2x+17}$ **Đ/s:** $x \in \left(0;4\right]$

9. $\sqrt{2x^3+3x^2+6x+16} - \sqrt{4-x} > 2\sqrt{3}$ **Đ/s:** $x \in \left(1;4\right]$

10. $9(x^2+1) \le (3x+7)\left(1-\sqrt{3x+4}\right)^2$ **Đ/s:** $x \in \left[-\dfrac{4}{3};-1\right)$

11. $2\sqrt{1-\dfrac{2}{x}} + \sqrt{2x-\dfrac{8}{x}} \ge x$ **Đ/s:** $x \in \left[-2;0\right) \in \left\{1+\sqrt{5}\right\}$

12. $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$ **Đ/s:** $x\in\left[-2;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3};2\right]$

13. $2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}}+x^2-4\le\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$ **Đ/s:** $x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$

14. $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}\ge 2(x+1)$ **Đ/s:** $x\in\left(-\infty;-1\right]$

15. $\dfrac{3-2\sqrt{x^2+3x+2}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}}>1$ **Đ/s:** $x\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{6};+\infty\right)$

16. $\dfrac{\sqrt{x}(x+\sqrt{1-x^2})}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}}\ge 1$ **Đ/s:** $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

17. $\sqrt{2x^2+11x+15}+\sqrt{x^2+2x-3}\ge x+6$ **Đ/s:** $\left(-\infty;-\dfrac{7}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

HT9. Giải các phương trình sau *(Đặt ẩn phụ không hoàn toàn)*:

1. $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$ **Đ/s:** $x=1\pm\sqrt{2}$
2. $x^2+(3-\sqrt{x^2+2})x=1+2\sqrt{x^2+2}$ **Đ/s:** $x=\pm\sqrt{14}$
3. $(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\dfrac{3}{2}x-3$ **Đ/s:** $x=\pm 1; x=5$
4. $3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)$ **Đ/s:** $x=0$
5. $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}$ **Đ/s:** $x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$
6. $4\sqrt{x+1}-1=3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}$ **Đ/s:** $x=-\dfrac{3}{5}; x=0$
7. $2\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}=3x^2+1$ **Đ/s:** $x=0$
8. $x^2+2(x-1)\sqrt{x^2+x+1}-x+2=0$ **Đ/s:** $x=0; x=-1$
9. $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1$ **Đ/s:** $x=1\pm\sqrt{2}$
10. $6x^2-10x+5-(4x-1)\sqrt{6x^2-6x+5}=0$ **Đ/s:** $x=\dfrac{\sqrt{59}-3}{10}$

HT10. Giải các phương trình sau (Đặt 1 ẩn phụ):

1. $\sqrt{2x^2+4x+1}=1-x^2-2x$ **Đ/s:** $x=-2; x=0$
2. $\sqrt{x+2}+\sqrt{5-x}+\sqrt{(x+2)(5-x)}=4$ **Đ/s:** $x=\dfrac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}$
3. $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$ **Đ/s:** $x=3$
4. $(x^2+1)^2=5-x\sqrt{2x^2+4}$ **Đ/s:** $x=-\sqrt{2}\cup x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$
5. $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$ **Đ/s:** $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
6. $\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}-1=0$ **Đ/s:** $x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
7. $2x^2-6x+4=3\sqrt{x^3+8}$ **Đ/s:** $x=3\pm\sqrt{13}$
8. $2x^2+5x-1=7\sqrt{x^3-1}$ **Đ/s:** $x=4\pm\sqrt{6}$

9. $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$ **Đ/s:** $x=-1\cup x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$

10. $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$ **Đ/s:** $x=1-\sqrt{2}\cup x=2+\sqrt{3}$

HT11. Giải các phương trình sau (đặt 2 ẩn phụ hoặc chuyển về hệ):

1. $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{2}$ **Đ/s:** $x=0;x=5$

2. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ **Đ/s:** $x=1;x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

3. $3x^2+6x-3=\sqrt{\dfrac{x+7}{3}}$ **Đ/s:** $x=\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6};x=\dfrac{-7-\sqrt{69}}{6}$

4. $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$ **Đ/s:** $x=-1;x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$

5. $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5}$ **Đ/s:** $x=1-\sqrt{2};x=2+\sqrt{3}$

6. $4\sqrt[3]{(x+2)^2}-7\sqrt[3]{(4-x)^2}+3\sqrt[3]{(2-x)^2}=0$

7. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=2$ **Đ/s:** $x=-6;x=1$

8. $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48}=x-24$ **Đ/s:** $x=-2-2\sqrt{7};x=-5-\sqrt{31}$

9. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$ **Đ/s:** $x=1;x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

HT12. Giải các bất phương trình sau (Đặt ẩn phụ):

1. $(x+1)(x+4)<5\sqrt{x^2+5x+28}$ **Đ/s:** $x\in(-9;4)$

2. $x(x-4)\sqrt{-x^2+4x}+(x-2)^2<2$ **Đ/s:** $x\in\left(2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

3. $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$ **Đ/s:** $x\in\left(\dfrac{6}{7};6\right)$

4. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+2}+3\le 3\sqrt{-x^2+x+6}$ **Đ/s:** $x\in\left[-2;-1\right]\cup\left[2;3\right]$

5. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}\le x+\sqrt{x^2-16}-6$ **Đ/s:** $x\in\left[\dfrac{145}{36};+\infty\right)$

6. $\sqrt{3x^2+6x+4}<2-2x-x^2$ **Đ/s:** $x\in(-2;0)$

7. $2\sqrt{\dfrac{3x-1}{x}}\ge\dfrac{x}{3x-1}+1$ **Đ/s:** $x\in(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

8. $(x+1)(x-3)\sqrt{-x^2+2x+3}<2-(x-1)^2$ **Đ/s:** $x\in\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$

9. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$ **Đ/s:** $x\in\left(1;\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$

10. $\dfrac{1}{1-x^2}+1>\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$ **Đ/s:** $x\in\left(-1;\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};1\right)$

HT13. Giải các phương trình sau *(sử dụng tính đơn điệu của hàm số)*

1. $\sqrt{\dfrac{6}{3-x}}+3\sqrt{\dfrac{8}{2-x}}=14$ **Đ/s:** $x=\dfrac{3}{2}$

2. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+\sqrt{7x+2}}=4$ **Đ/s:** $x=1$

3. $4x^3+x-(x+1)\sqrt{2x+1}=0$ $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ **Đ/s:** $x=\dfrac{-1+\sqrt{21}}{4}$

4. $x(4x^2+1)+(x-3)\sqrt{5-2x}=0$
5. $(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+3x(1+\sqrt{9x^2+2})+5x+3=0$ **Đ/s:** $x=-\dfrac{3}{5}$
6. $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^4(2x^2-4x+1)$ **Đ/s:** $x=0;x=2$
7. $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$ **Đ/s:** $x=1;x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
8. $8x^3-36x^2+53x-25=\sqrt[3]{3x-5}$ **Đ/s:** $x=2;x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{4}$
9. $x^3-15x^2+78x-141=5\sqrt[3]{2x-9}$ **Đ/s:** $x=4;x=\dfrac{11\pm\sqrt{5}}{2}$
10. $2x^3+x^2-3x+1=2(3x-1)\sqrt{3x-1}$ **Đ/s:** $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

HT14. Giải bất phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu của hàm số)

1. $\sqrt{x+1}>3-\sqrt{x+4}$ **Đ/s:** $x\in(0;+\infty)$
2. $\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}\ge 4$ **Đ/s:** $x\in\left[1;+\infty\right)$
3. $2(x-2)\left(\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x+2}\right)\ge 3x-1$ **Đ/s:** $x\ge 3$
4. $(x+2)\sqrt{x+1}>27x^3-27x^2+12x-2$ **Đ/s:** $x\in\left[-1;\dfrac{7}{9}\right)$
5. $3\sqrt{3-2x}+\dfrac{5}{\sqrt{2x-1}}-2x\le 6$ **Đ/s:** $x\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

TUYỂN TẬP ĐỀ THI ĐẠI HỌC CÁC NĂM

HT15. Giải bất phương trình:

1) **(B – 2012)** $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$

2) **(A – 2010)** $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2(x^2-x+1)}}\geq 1$

3) **(A – 2005)** $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-4}$

4) (A – 2004) $\dfrac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

5) **(D – 2002)** $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0$

Đ/s: 1) $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$ 2) $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 3) $2<x<10$

4) $x>10-\sqrt{34}$ 5) $x<-\dfrac{1}{2}\cup x=2\cup x\geq 3$

HT16. Giải các phương trình sau:

1) (B – 2011) $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x$

2) (B – 2010) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

3) (A – 2009) $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$

4)(D – 2006) $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0$

5) (D – 2005) $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$

Đ/s: 1) $x=\dfrac{6}{5}$ 2) $x=5$ 3) $x=-2$ 4) $x=2-\sqrt{2}$ 5) $x=3$

CHUYÊN ĐỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. CÁC DẠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

Giải và biện luận:

– Tính các định thức: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Xét D		Kết quả
$D \neq 0$		*Hệ có nghiệm duy nhất* $\left(x = \dfrac{D_x}{D}; y = \dfrac{D_y}{D}\right)$
$D = 0$	$D_x \neq 0$ *hoặc* $D_y \neq 0$	*Hệ vô nghiệm*
	$D_x = D_y = 0$	*Hệ có vô số nghiệm*

Chú ý: *Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.*

2. Hệ gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tuỳ theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

3. Hệ đối xứng loại 1

Hệ có dạng: (I) $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$ (với *f(x, y) = f(y, x)* và *g(x, y) = g(y, x)*).

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa *x* và *y* thì *f(x, y)* và *g(x, y)* không thay đổi).

- Đặt *S = x + y, P = xy*.
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (II) với các ẩn là *S* và *P*.
- Giải hệ (II) ta tìm được S và P.
- Tìm nghiệm (x, y) bằng cách giải phương trình: $X^2 - SX + P = 0$.

4. Hệ đối xứng loại 2

Hệ có dạng: (I) $\begin{cases} f(x,y) = 0 & (1) \\ f(y,x) = 0 & (2) \end{cases}$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa *x* và *y* thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

- Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) - f(y,x) = 0 & (3) \\ f(x,y) = 0 & (1) \end{cases}$$

- Biến đổi (3) về phương trình tích:

$$(3) \Leftrightarrow (x-y).g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ g(x,y) = 0 \end{array}\right.$$

- Như vậy, (I) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ x = y \end{cases} \\ \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$.

- Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

5. Hệ đẳng cấp bậc hai

Hệ có dạng: (I) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$.

• Giải hệ khi $x = 0$ (hoặc $y = 0$).
• Khi $x \neq 0$, đặt $y = kx$. Thế vào hệ (I) ta được hệ theo k và x. Khử x ta tìm được phương trình bậc hai theo k. Giải phương trình này ta tìm được k, từ đó tìm được $(x; y)$.

Chú ý: *– Ngoài các cách giải thông thường ta còn sử dụng phương pháp hàm số đểgiải (sẽ học ở lớp 12).*
– Với các hệ phương trình đối xứng, nếu hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ. Do đó nếu hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

BÀI TẬP

HT1. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x+y) = -31 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$

Đ/s: 1) 2) 3)

4) 5) 6)

HT2. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x^2 + 3y^2 - 2x = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 2y = 2 \\ 2x^2 + xy - y = 9 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + x = 19 \\ x^2 + y^2 + y = 7 \end{cases}$

Đ/s: 1) $(1;-1);(-\frac{5}{7};-\frac{1}{7})$ 2) $(2;1)$ 3) $(1;2);\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{33}}{4};\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right);\left(\frac{5+\sqrt{33}}{4};\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)$

HT3. Giải hệ phương trình sau (đẳng cấp bậc 2)

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = -1 \\ 2x^2 - xy + 3y^2 = 12 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 5 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$

Đ/s: 1) $(3;1);(-3;-1);\left(\sqrt{\frac{7}{3}};-\sqrt{\frac{7}{3}}\right);\left(-\sqrt{\frac{7}{3}};\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ 2) $(1;2);(-1;-2);\left(-\frac{9}{\sqrt{31}};\frac{7}{\sqrt{31}}\right);\left(\frac{9}{\sqrt{31}};-\frac{7}{\sqrt{31}}\right)$

3) $(-1;-4),(1;4)$ 4) $(-1;1),(1;-1)$ 5) $(-3;-1),(3;1)$

HT4. Giải các hệ phương trình sau (đối xứng loại 1)

1) $\begin{cases} xy(x+2)(y+2) = 24 \\ x^2 + y^2 + 2(x+y) = 11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 12(x+y) \\ x - y = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + 4x + y = 7 \\ x(x+3)(x+y) = 12 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 2 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 91 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$

Đ/s: 1) $(1;-4),(1;2),(2;-3),(2;1),(-4;-3),(-4;1),(-3;-4),(-3;2)$ 2) $(-2;-4),(4;2),(1;-1)$

3) $((3;2),(2;3)$ 4) $(-2;1),(1;-2),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$

5) $(-4;7),(1;2),\left(\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2};\dfrac{-11-\sqrt{21}}{2}\right),\left(\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2};\dfrac{-11+\sqrt{21}}{2}\right)$ 6) $(3;1),(1;3)$

7) $(-3;-1),(-1;-3),(1;3),(3;1)$ 8) $(1;4),(4;1)$

HT5. Giải các hệ phương trình sau (hệ đối xứng loại 2)

1) $\begin{cases}2x+\sqrt{y-1}=5\\2y+\sqrt{x-1}=5\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x^2=2y+\dfrac{1}{y}\\3y^2=2x+\dfrac{1}{x}\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sqrt{x+5}+\sqrt{y-2}=7\\\sqrt{y+5}+\sqrt{x-2}=7\end{cases}$

4) $\begin{cases}x+\sqrt[4]{y-1}=1\\y+\sqrt[4]{x-1}=1\end{cases}$ 5) $\begin{cases}x^3=3x+8y\\y^3=3y+8x\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y\\y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x\end{cases}$

Đ/s: 1) $(2;2)$ 2) $(1;1)$ 3) $(11;11)$

4) $(1;1)$ 5) $(0;0),(\sqrt{11};\sqrt{11}),(-\sqrt{11};-\sqrt{11})$ 6) $(0;0),(1;1)$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương pháp rút thế, phương pháp cộng

HT6. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases}x^3-2xy+5y=7\\3x^2-2x+y=3\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x^3+y(x+1)=4x^2\\5x^4-4x^6=y^2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x-\sqrt{y+1}=\dfrac{5}{2}\\y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\dfrac{3}{4}\end{cases}$

4) $\begin{cases}5x^2-3y=x-3xy\\x^3-x^2=y^2-3y^3\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\sqrt{x^2+x+y+1}+x+\sqrt{y^2+x+y+1}+y=18\\\sqrt{x^2+x+y+1}-x+\sqrt{y^2+x+y+1}-y=2\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x}=2\\\left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y}=6\end{cases}$

1) $(1;2),\left(\dfrac{6-2\sqrt{33}}{7};\dfrac{-153+44\sqrt{23}}{49}\right),\left(\dfrac{6+2\sqrt{33}}{7};\dfrac{-153-44\sqrt{23}}{49}\right)$ 2) $(0;0),(1;1),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

3) $\left(3;-\dfrac{3}{4}\right)$ 4) $(0;0),(-1;1),\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ 5) $(4;4)$ 6) $\left(4+2\sqrt{3};12+6\sqrt{3}\right)$

2. Tìm mối liên hệ giữa x,y từ 1 phương trình rồi thế vào phương trình còn lại

1) $\begin{cases}xy+x-2=0\\2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\\xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^3-6x^2y+9xy^2-4y^3=0\\\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2\\x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y\end{cases}$

5) $\begin{cases}y^4-2xy^2+7y^2=-x^2+7x+8\\\sqrt{3y^2+13}-\sqrt{15-2x}=\sqrt{x+1}\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\sqrt{x-1}-\sqrt{y}=8-x^3\\(x-1)^4=y\end{cases}$

7) $\begin{cases}x+3=2\sqrt{(3y-x)(y+1)}\\\sqrt{3y-2}-\sqrt{\dfrac{x+5}{2}}=xy-2y-2\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=1+\sqrt{x^2-y^2}\\\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\end{cases}$

9) $\begin{cases}2x^2+xy-y^2=5x-y-2\\x^2+y^2+x+y=4\end{cases}$ 10) $\begin{cases}3x^2+1+2y(x+1)=4y\sqrt{x^2+2y+1}\\y(y-x)=3-3y\end{cases}$

Đ/s: 1) $(1;1),\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-\sqrt{5}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right)$ 2) $(1;1),(-1;-1),\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

3) $(2;2),\left(32-8\sqrt{15};8-2\sqrt{15}\right)$ 4) $(5;2)$ 5) $(3;-2),(3;2)$

6) $(2;1)$ 7) $(3;2)$ 8) $(1;0)$

9) $(1;1).\left(-\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)$ 10) $(1;1),\left(\frac{415}{51};\frac{17}{3}\right)$

3. Đặt ẩn phụ chuyển về hệ cơ bản

HT7. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases}xy-x+y=3\\x^2+y^2-x+y+xy=6\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y+\frac{x}{y}=5\\(x+y)\frac{x}{y}=6\end{cases}$ 3) $\begin{cases}2\sqrt{2x+y}=3-2x-y\\x^2-2xy-y^2=2\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=19(x-y)^2\\x^2-xy+y^2=7(x-y)\end{cases}$ 5) $\begin{cases}12x+3y-4\sqrt{xy}=16\\\sqrt{4x+5}+\sqrt{y+5}=6\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+6}-y=1\\x^2+xy+y^2=7\end{cases}$

7) $\begin{cases}y+xy^2=6x^2\\1+x^2y^2=5x^2\end{cases}$ 8) $\begin{cases}x^2+1+y\left(x+y\right)=4y\\(x^2+1)(y+x-2)=y\end{cases}$ 9) $\begin{cases}4xy+4(x^2+y^2)+\frac{3}{(x+y)^2}=7\\2x+\frac{1}{x+y}=3\end{cases}$

10) $\begin{cases}8(x^2+y^2)+4xy+\frac{5}{(x+y)^2}=13\\2x+\frac{1}{x+y}=1\end{cases}$

Đ/s: 1) $(0;-3),(3;0)$ 2) $\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right),(2;1)$ 3) $(1;-1),(-3;7)$ 4) $(0;0),(3;2),(-2;-3)$

5) $(1;4)$ 6) $(-3;2),(1;2)$ 7) $(1;2),\left(\frac{1}{2};1\right)$ 8) $(1;2),(-2;5)$

9) $(1;0)$ 10) $(0;1)$

4. Phương pháp hàm số

HT8. Giải các hệ phương trình sau:

1) $\begin{cases}\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4\\\sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^3-3x=y^3-3y\\x^6+y^6=1\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+\frac{1}{x^2+1}=y+\frac{1}{y^2+1}\\\sqrt{9x^2+\frac{4}{y^2}}=\frac{3x^2+2x-2}{y}\end{cases}$

4) $\begin{cases}x^3(4y^2+1)+2(x^2+1)\sqrt{x}=6\\x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1})=x+\sqrt{x^2+1}\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y(1+x^2)=x(1+y^2)\\x^2+3y^2=1\end{cases}$ 6) $\begin{cases}\sqrt{x^2+21}=\sqrt{y-1}+y^2\\\sqrt{y^2+21}=\sqrt{x-1}+x^2\end{cases}$

7) $\begin{cases}x=\sqrt{y+45}-\sqrt{y-5}\\y=\sqrt{x+45}-\sqrt{x+5}\end{cases}$ 8) $\begin{cases}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=x-y\\x^2-12xy+9y^2+4=0\end{cases}$

9) $\begin{cases}(23-3x)\sqrt{7-x}+(3y-20)\sqrt{6-y}=0\\\sqrt{2x+y+2}-\sqrt{-3x+2y+8}+3x^2-14x-8=0\end{cases}$ 10) $\begin{cases}x^3-2y+1=0\\(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\end{cases}$

11) $\begin{cases} y^3 + 3y^2 + y + 4x^2 - 22x + 21 = (2x+1)\sqrt{2x-1} \\ 2x^2 - 11x + 9 = 2y \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{2y^2+1} + y = 4 + \sqrt{x+4} \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4\sqrt{1+2x^2y} - 1 = 3x + 2\sqrt{1-2x^2y} + \sqrt{1-x^2} \\ 2x^3y - x^2 = \sqrt{x^4+x^2} - 2x^3y\sqrt{4y^2+1} \end{cases}$

14) $\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x - 2xy + 1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}$

Đ/s: 1) $(3;2)$

2) $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}};\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}};-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$

3) $\left(\frac{1\pm\sqrt{7}}{3};\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}\right)$

4) $\left(1;\frac{1}{2}\right)$

5) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

6) $(2;2)$

7) $(4;4)$

8) $(\sqrt{2};\sqrt{2})$

9) $(5;4)$

10) $(1;1)$

11) $(1;0),(5;2)$

12) $(-3;2)$

13)

14) $(1;-1),\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2};\frac{\sqrt{11}-3}{2}\right)$